5E

УДК 004.89:004.93

О.В. Егорова, В.Е. Снитюк
Черкасский государственный технологический университет, г. Черкассы, Украина
yegorovaov@gmail.com, snytyuk@gmail.com

Применение технологии композиционного преодоления неопределенности к решению задач с ограничениями

В статье предложен метод решения задач линейного программирования, базирующийся на эволюционной парадигме. Исследован алгоритм его реализации, в основе которого находится полное пространство поиска возможных решений. Рассмотрены аспекты программной реализации метода. Выполнена экспериментальная верификация и сравнительный анализ с результатами применения генетических алгоритмов.

Введение

Функционирование сложных производственных, экономических, технических и социальных систем характеризуется набором определенных факторов, параметров и оценивается множеством критериев. Как факторы, так и критерии могут иметь различную природу, но в подавляющем большинстве случаев (в практических задачах), количество критериев ограничено, а на значения факторов или их комбинации наложены определенные ограничения. Математически формализованные задачи оптимизации процессов функционирования указанных систем составляют класс задач с ограничениями (Constraint Satisfaction Problem) [1].

К классу задач с ограничениями относятся и задачи линейного программирования, широко применяемые в экономико-математическом моделировании. Использование таких моделей в экономике позволяет выделить и формально описать наиболее существенные связи между экономическими объектами, используя высокий уровень абстракции в силу сложности изучаемых процессов и явлений, индуктивным путем получить новые знания об объекте исследования. Первоочередными проблемами, для решения которых целесообразно применять экономико-математическое моделирование и методы оптимизации, являются: определение номенклатуры продукции (видов услуг), а также оптимизация объектов производства на определенный перспективный период; распределение имеющихся материальных и финансовых ресурсов по видам деятельности; определение цены, которая будет обеспечивать оптимальный уровень прибыли; накопление собственных средств для развития производственной деятельности, определения потребностей в кредитах, которые могут привлекаться; определение влияния изменений стоимостных показателей на экономическую эффективность предприятия и т.д. Однако решения таких задач является сложным нетривиальным процессом, который требует разработки эффективных методов поиска решений с использованием компьютерной техники, новых идей, принципов, моделей и методов.

В последние годы в области эволюционных вычислений новые методы появляются из идеи комбинированного использования технологий Soft Computing [2]. Одним из таких методов является технология композиционного преодоления неопределенности [2], которая позволяет осуществлять целенаправленную оптимизацию, учитывающую субъективные предпочтения исследователя и интегрирующая в себе элементы теории вероятностей, теории нечетких множеств и эволюционных стратегий.

Целью настоящей работы является адаптация технологии композиционного преодоления неопределенности к решению задач линейного программирования на основе использования штрафных функций, определение особенностей ее применения, преимуществ и недостатков, а также выполнение сравнительного анализа результатов, полученных с использованием эволюционных методов.

Постановка задачи

Задачи с ограничениями заключаются в поиске:

$$y = f\left(\overline{X}\right) \to opt, \qquad x \in X^n \tag{1}$$

при ограничениях

$$c = \left(r_c, s_c\right), \ c \in C^m, \ c = \bigcup_{m=1}^{M} C_m, \tag{2}$$

где $\overline{X} = \left(x_1,...,x_n\right)$ – множество переменных, принадлежащих пространству X^n; $f\left(x\right)$ – целевая функция; $r_c \subseteq X^m$ – произвольное m-арное отношение на x; $s_c : X^n \to X^m$ – функция для проектирования вектора $\overline{X} = \left(x_1,...,x_n\right) \in X^n$ на некоторые из m его компонент [1].

Классифицируют задачи с ограничениями, как правило, по свойствам входной информации (детерминированные, стохастические); по характеру описываемых явлений (динамические, статистические); типу переменных (зависимые, независимые; дискретные, непрерывные; детерминированные, случайные); типу ограничений (унарные, бинарные, высших порядков; линейные, нелинейные; абсолютные, приоритетные).

Задачи линейного программирования формулируются так:

$$y = f(\overline{X}) \to opt, \ x \in X^n \tag{3}$$

при ограничениях

$$g_i\left(\overline{X}\right) = 0, i = 0,..., p, \ \ p \ge 0, \tag{4}$$

$$h_i\left(\overline{X}\right) \le 0, i = p+1,...,m, \ m-p \ge 0, \tag{5}$$

где $x \in S \cap F$. Множество $S \subseteq X^n$ определяет пространство поиска, а множество $F \subseteq X^n$ – допустимое пространство поиска, добавленное ограничениями. Пространство поиска S является n-мерным прямоугольником в X^n (область определения переменных определена верхними и нижними границами):

$$l(i) \le x_i \le u(i), \ 1 \le i \le n.$$

Основные направления решения задачи

Поскольку необходимо найти глобальные оптимумы целевой функции в многомерном пространстве независимых переменных, целесообразно применить эволюционные методы. Их использование, в отличие от традиционных методов, не зависит от выбора начальной точки и не требует выполнения дополнительных условий на характеристики целевой функции. Выбор метода эволюционного моделирования является прерогативой исследователя.

Для обработки ограничений с целью изъятия неперспективных решений в генетических алгоритмах применяются штрафные функции:

$$eval\left(X\right) = \begin{cases} f\left(\overline{X}\right), & если \ \overline{X}, \in F \cap S, \\ f\left(\overline{X}\right) + penalty\left(\overline{X}\right), & в \ противном \ случае, \end{cases}$$

где штраф $penalty(\overline{X})$ равен нулю, если ограничение выполняется, в противном случае штраф имеет определенное значение. Существует несколько подобных методов, в большинстве из них множество функций $f_j(1 \le j \le m)$ используется для генерации штрафов; функция f_j оценивает штраф, который будет наложен на j-е ограничение, по формуле:

$$f_j(\overline{X}) = \begin{cases} \max\{0, g_j(\overline{X})\}, & \textit{якщо } 1 \le j \le q \\ |h_j(\overline{X})|, & \textit{якщо } q+1 \le j \le m. \end{cases}$$

Конечно, методы отличаются некоторыми важными деталями, в частности, построением штрафных функций и изъятием неперспективных решений. Рассмотрим два из них.

Первый метод, предложенный A. Homaifar, S.H.-Y. Lai, X. Qi [3], предусматривает, что для каждого ограничения формируется множество интервалов, которые определяют соответствующие штрафные коэффициенты. Метод представлен таким алгоритмом:

Шаг 1. Для каждого ограничения сформировать несколько (l) штрафных уровней.

Шаг 2. Для каждого штрафного уровня и каждого ограничения сгенерировать штрафные коэффициенты $R_{ij}(i = 1,2,...,l, j = 1,2,...,m)$, причем наивысшему штрафному уровню должно соответствовать наибольшее значение коэффициента.

Шаг 3. Определить выборочную совокупность возможных решений.

Шаг 4. Вычислить значение функции, оптимумы которой ищут, в точках выборочной совокупности по формуле:

$$eval(\overline{X}) = f(\overline{X}) + \sum_{j=1}^{m} R_{ij} f_j^2(\overline{X}).$$

Недостаток метода заключается в том, то он зависит от большего числа параметров. Так, для m ограничений метод требует: m параметров для генерации числа интервалов для каждого ограничения – границ интервалов, l параметров для каждого ограничения – штрафных коэффициентов R_{ij}. Таким образом, в общем случае метод требует $m(2l+1)$ параметров для управления m ограничениями.

Авторы второго метода J.A. Joines и C.R. Houk [4], аналогично предыдущему методу, предлагают использовать динамические штрафы. Индивиды вычисляются (на итерации t) с использованием формулы:

$$eval(\overline{X}) = f(\overline{X}) + (C \times t)^{\alpha} \sum_{j=1}^{m} f_j^{\beta}(\overline{X}),$$

где C, α и β константы. Целесообразно принять такие значения этих параметров: $C = 0{,}5$, $\alpha = \beta = 2$. Этот метод содержит намного меньше параметров, чем предыдущий.

Воспользуемся приведенными штрафными функциями в технологии композиционного преодоления неопределенности [2], которая определена таким алгоритмом (процедура Evomax):

Шаг 1. $i = 1$.

Шаг 2. Определить совокупность возможных решений (Ξ) и определить процентное соотношение количества индивидов на следующем шаге.

Шаг 3. Пока условия завершения работы алгоритма не выполнены {

Шаг 3.1. $i = i + 1$.

Шаг 3.2. Вычислить значение функции (Ξ).

Шаг 3.3. Построить функцию принадлежности μ.

Шаг 3.4. Определить множество точек $\{x_i\}$, которые принадлежат множеству среза и для которых выполняется неравенство $|x_i - x_j| > \delta^*$.

Шаг 3.5. Генерировать последовательности $\{z_i^j\}$ для каждой точки с множества $\{x_i\}$.

Шаг 3.6. Мутация $\{z_i^j\}$.

}

Приведенный метод позволяет осуществлять целенаправленную оптимизацию, учитывая цели и задачи исследования, поскольку в нем в значительной степени преодолены такие недостатки технологий Soft Computing, как: зависимость точности решений от дискретности их представления и заданной точности будущего результата (как в генетических алгоритмах); использование исключительно равномерного и (или) нормального распределения, что значительно увеличивает время решения задачи (как в эволюционных стратегиях); зависимость сходимости от качества популяции.

Результаты экспериментов

Рассмотрим пример. Фабрика производит изделия четырех наименований: печенье, пряники, сухари и бублики. Для изготовления продукции используется сахар, растительное масло, пшеничная мука, маргарин, изюм.

Интенсивность потребления каждого ингредиента на тонну изделия соответствующего наименования и прибыль от реализации единицы веса заданы в табл. 1. Необходимо определить оптимальный объем производства продукции каждого наименования (на фабрике есть 20 т сахара, 24 т растительного масла, 30 т муки, 0,8 т маргарина, 0,6 т изюма), при котором прибыль будет максимальной.

Таблица 1 – Интенсивность потребления ингредиентов и прибыль

Ингредиенты / Изделие	Сахар	Растительное масло	Мука	Маргарин	Изюм	Прибыль, тыс. грн
Печенье	0,15	0,2	0,6	0,03	0,02	1
Пряники	0,4	0,1	0,8	–	–	1,2
Сухари	0,3	0,2	0,5	–	0,05	0,8
Бублики	0,2	0,2	0,4	–	–	1

Рыночный спрос на печенье, пряники, сухари и бублики составляет 5, 6, 3 и 4 т соответственно.

Математическая модель задачи. Пусть $x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3}$ – количество изделий i-го наименования, тогда экономико-математическая модель задачи выглядит так:

$$0,15x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 \leq 20,$$

$$0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 + 0,2x_4 \leq 24,$$

$$0,6x_1 + 0,8x_2 + 0,5x_3 + 0,4x_4 \leq 30,$$

$$0,03x_1 \leq 0,8,$$

$$0,02x_1 + 0,05x_3 \le 0,6,$$
$$0 \le x_1 \le 5,$$
$$0 \le x_2 \le 6,$$
$$0 \le x_3 \le 3,$$
$$0 \le x_4 \le 4,$$
$$f = x_1 + 1,2x_2 + 0,8x_3 + x_4 \to \max.$$

Для исследования, целью которого было выяснение эффективности технологии композиционного преодоления неопределенности при решении задач линейного программирования, выполнено фиксированное число запусков алгоритма. При этом начальная популяция состояла из 50 индивидов, максимальное число возможных итераций – 300, вероятность мутации – 1%, среднеквадратическое отклонение – 1, точность решения – 10^{-4}.

Таблица 2 – Результаты экспериментов

Название критерия		Генетический алгоритм		Композиционный метод	
		Метод 1	Метод 2	Метод 1	Метод 2
Критерий максимума функции	b m w t	16,767 9,5754 13,157 16,6	21,618 12,871 17,869 35,124	18,6 12,655 15,128 4,46	18,6 12,428 15,395 6,096
Критерий среднего значения функции	b m w t	-	-	18,6 12,63 14,769 107,109	18,6 12,883 15,691 46,561
Критерий максимального количества итераций	b m w t	21,606 12,820 16,968 88,45	18,059 9,17 13,625 86,53	18,6 12,785 15,664 6,46	18,6 12,427 15,07 6,26
Все критерии	b m w t	21,679 12,707 17,079 50,21	21,646 12,758 17,879 79,42	18,6 12,509 14,72 3,42	18,6 12,594 15,603 2,43

Результаты экспериментов для каждого метода (1, 2) поданы в табл. 2, где показано наилучшее (b), среднее (m) и наихудшее (w) значение целевой функции, а также время расчета (t). Эксперименты проводились с использованием трех типов критериев. Согласно первому критерию итерации прекращались, когда максимальные значения целевой функции на соседних итерациях незначительно отличались. По второму критерию сравнивались средние значения целевой функции на разных итерациях. Вычисления прекращались после определенного количества итераций – по третьему критерию. Использовался также интегральный критерий: вычисления прекращались, если выполнялся хотя бы один критерий из предложенных выше.

Выводы, которые можно сделать по результатам моделирования, являются неоднозначными. В частности, согласно критерию среднего значения функции, используя генетический алгоритм, не удалось получить результат за приемлемое время. Лучшие

результаты были получены в случае применения критерия максимального количества итераций. Причиной этого является полиэкстремальный характер целевой функции и, как следствие, частое попадание в локальные экстремумы.

Выводы

Предложенный метод позволяет решать задачи линейного программирования, учитывая особенности ограничений. Еще одним его преимуществом является время решения задачи. Как следует из табл. 2, значение времени, необходимое для расчета разработанным методом, на порядок меньше времени работы генетического алгоритма. Результаты работы двух методов являются сравнимыми.

Следует заметить, что технология композиционного преодоления неопределенности является параметрическим методом. Его использование для решения указанной задачи осуществлено без оптимизации параметров. Применение метода для решения тестовых оптимизационных задач показало, что оптимизация параметров метода приводит к увеличению точности результата до 30% и скорости сходимости до 24%. Поэтому параметрическая оптимизация предложенного метода является еще одним перспективным способом повышения эффективности процессов решения задач с ограничениями, тем более что для эволюционных методов эта проблема актуальна.

Литература

1. Рассел С. Искусственный интеллект: Современный подход / С. Рассел, П. Норвиг. – М. : Вильямс, 2005. – 1424 с.
2. Снитюк В.Е. Композиционное преодоление неопределенности в задачах нелинейной многофакторной оптимизации / В.Е. Снитюк // Искусственный интеллект. – 2004. – № 4. – С. 207-210.
3. Homaifar A. Constrained optimization via genetic algorithms / A. Homaifar, S.H.-Y. Lai, X. Qi // Simulation. – 1994. – Vol. 62, № 4. – P. 242-254.
4. Joines J.A. On the use of non-stationary Penalty functions to solve nonlinear constrained optimization problems with Gas / J.A. Joines and C.R. Houk // Proceedings of the IEEE ICEC. – 1994. – P. 579-584.
5. Michalewicz Zbigniew. Genetic algorithms, numerical optimization, and constraints / Zbigniew Michalewicz // Commun, ACM 39 (12es). – 1996. – P. 175-201.

Literatura

1. Rassel S. Iskusstvennyj intellekt: Sovremennyj podhod. M.: Vil'jams. 2005. 1424 s.
2. Snitjuk V.E. Iskusstvennyj intellekt. № 4. 2004. S. 207-210.
3. Homaifar A. Simulation. Vol. 62. № 4. 1994. S. 242-254.
4. Joines J.A. Proceedings of the IEEE ICEC. 1994. P. 579-584.
5. Michalewicz Zbigniew. Commun, ACM 39 (12es). 1996. P. 175-201.

О.В. Єгорова, В.Є. Снитюк

Аспекти застосування методу композиційного подолання невизначеності в задачах з обмеженнями
У статті запропонований метод розв’язання задач лінійного програмування на основі еволюційної парадигми. Досліджено алгоритм його реалізації на основі повного простору пошуку можливих рішень. Розглянуто аспекти програмної реалізації методу. Виконана експериментальна верифікація та наведені результати порівняльного аналізу з генетичними алгоритмами.

O.V. Yegorova, V.E. Snytyuk

Application of the Uncertainty Composition Overcoming Technology to Solving Problems with Constraints
In this paper the problem decision method for linear programming on the basis of evolutionary paradigm is offered. Its realization algorithm is investigational on the basis of complete space search of possible decisions. The aspects of method software realization are considered. Experimental verification and comparative analysis the results are executed.

Статья поступила в редакцию 22.06.2011.